paul verlaine
université - metz
ufr mathématique informatique
mécanique et automatique

Master de Mathématiques
M1 – Analyse fonctionnelle

Devoir surveillé du 12 novembre 2009[1] - durée : 2h

- Le seul document autorisé est un résumé manuscrit du cours de trois pages maximum.
- Les téléphones portables et les calculatrices ne sont pas autorisés.
- Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

1. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique **séparé non compact** et $\hat{X}$ un ensemble contenant X tel que $\hat{X} \setminus X \neq \emptyset$. On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des complémentaires par rapport à $\hat{X}$ des parties compactes de X.
   a) Démontrer que $\mathcal{S}$ est stable par intersection finie et par réunion quelconque.
   b) Soit $\hat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \mathcal{S}$; vérifier que $\hat{\mathcal{T}}$ est une topologie sur $\hat{X}$.
   Dans la suite du problème, on suppose que $\hat{X}$ est muni de cette topologie.
   c) Démontrer que $\mathcal{T}$ est la topologie induite par $\hat{\mathcal{T}}$ sur X et que X est partout dense dans $\hat{X}$.
   d) Démontrer que $\hat{X}$ vérifie la propriété de Heine-Borel-Lebesgue.
   e) Démontrer que $\hat{X}$ est compact si, et seulement si, X est localement compact et $\hat{X} \setminus X$ est réduit à un point.
2. a) Soient X et Y deux espaces topologiques tels que Y est discret (c'est-à-dire muni de la topologie discrète) et non réduit à un point. Démontrer que X est connexe si, et seulement si, les seules applications continues de X dans Y sont les fonctions constantes.
   b) Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes (d'un espace topologique) filtrante pour l'inclusion : pour tous i, $j \in I$, il existe $k \in I$ tel que $C_i \cup C_j \subset C_k$. Montrer que $C = \cup_{i \in I} C_i$ est connexe. (On pourra considérer une application continue de C à valeurs dans un espace discret.)
3. Soient X un espace topologique et $Y = (Y, d)$ un espace métrique. On dit qu'une suite (f_n) d'applications de X dans Y converge localement uniformément vers une application $f : X \to Y$ si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x tel que la suite $(f_{n|V})$ converge uniformément vers $f_{|V}$, c'est-à-dire
$$\sup_{x \in V} d(f_n(y), f(y)) \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$
   Si les f_n sont continues, montrer que f est continue. (On pourra établir au préalable l'inégalité, où $y \in V$,
$$d(f(y), f(x)) \leq 2 \sup_{z \in V} (f(z), f_n(z)) + d(f_n(x), f_n(y)), \text{ pout tout } n.)$$

[1]Le corrigé sera disponible à partir du 13 novembre 2009 à l'adresse

http ://www.math.univ-metz.fr/∼ choulli/enseignement.html

paul verlaine
université - metz
ufr mathématique informatique
mécanique et automatique

Master de Mathématiques
M1 – Analyse fonctionnelle

Corrigé du devoir surveillé du 12 novembre 2009

1. a) Soient $O_1, \dots, O_k$ des éléments de $\mathcal{S}$. Pour chaque i, $O_i = K_i^c$, donc $\cap_i O_i = (\cup_i K_i)^c$ est bien dans $\mathcal{S}$ car $\cup_i K_i$ est un compact de X. Si $\cup_{i\in I} O_i$ est une réunion quelconque d'éléments de $\mathcal{S}$, avec $O_i = K_i^c$ pour chaque $i \in I$, alors $\cup_{i\in I} O_i = (\cap_{i\in I} K_i)^c$. Puisque $\cap_{i\in I} K_i$ est un compact de X, on conclut que $\cup_{i\in I} O_i$ reste dans $\mathcal{S}$.
   b) D'après a), on déduit $\mathcal{T} \cup \mathcal{S}$ est stable par intersection finie et réunion quelconque, ce qui montre $\hat{\mathcal{T}}$ est une topologie car $\emptyset, \hat{X} \in \hat{\mathcal{T}}$. Pour montrer que $\hat{X} \in \hat{\mathcal{T}}$, on fixe $x \in X$ alors $\{x\}^c$, son complémetaire dans $\hat{X}$ et dans $\mathcal{S}$. Donc $\hat{X} = \{x\}^c \cup X \in \hat{\mathcal{T}}$.
   c) Si O est dans $\mathcal{S}$, on a $X \cap O = X \cap K^c$, où K est compact de X. Mais $X \cap K^c$ n'est rien d'autre que le complémentaire de K dans X, qui est un ouvert de X. On en déduit que $\mathcal{T}$ est bien la topologie induite par $\hat{\mathcal{T}}$ sur X.
   Si X n'était pas dense il existerait $x \in \hat{X} \setminus X$ et un voisinage V de x tel que $V \cap X = \emptyset$. Par suite, V étant le complémetaire d'un compact K de X, on aurait $X \subset V^c = K$, ce qui donne $X = K$. Ceci est impossible car X est supposé non compact.
   d) Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $\hat{X}$. Il existe alors un $O_j \in \mathcal{S}$. Donc $O_j = K^c$, où K est un compact de X. Il en résulte que $K \subset \cup_{i\neq j} O_i$ et puisque K est compact, on trouve $J \subset \{i \neq j\}$ fini tel que $K \subset \cup_{i\in J} O_i$. Par conséquent $\hat{X} = \cup_{\{j\}\cup J} O_i$.
   e) On suppose que $\hat{X}$ est compact et que $\hat{X} \setminus X$ contient au moins deux points x_1 et x_2 avec $x_1 \neq x_2$. Puisque $\hat{X}$ est séparé, il existe $V_1 = K_1^c$ voisinage de x_1 et $V_2 = K_2^c$ tel que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, avec K_i compact de X, $i = 1, 2$. On a donc
   $$V_1 \cap V_2 = K_1^c \cap K_2^c = (K_1 \cup K_2)^c = \emptyset.$$
   D'où $K_1 \cup K_2 = \hat{X}$, ce qui impossible car $K_1 \cup K_2 \subset X$. En d'autre termes, si $\hat{X}$ est compact alors nécessairement $\hat{X} = X \cup \{\omega\}$.
   On montre à présent que X est localement compact. Soit $x \in X$. Comme $\hat{X}$ est séparé, il existe V un voisinage de x et W un voisnage de ω tels que $V \cap W = \emptyset$. Mais $W = K^c$, où K est un compact de X. Il en résulte que $V \subset K$ et par suite, $\overline{V}$ (la fermeture dans X) est un voisinage compact de x dans X. Ceci prouve que X est bien localement compact.
   Inversement, si on suppose que X est localement compact et que $\hat{X} = X \cup \{\omega\}$ alors $(\hat{X}, \hat{\mathcal{T}})$ n'est rien d'autre que le compactifié d'Alexandroff de X.
2. a) Si X est connexe et si f est continue de X dans Y alors $f(X)$ est connexe dans Y. Ce dernier étant discret, $f(X)$ est réduit à un point. En d'autres termes, f est constante.
   Inversement, on suppose que X est tel que les seules applications f de X dans un espace discret Y non réduit à un point sont les constantes. Si X n'était pas connexe, il existerait une partition de X en deux ouverts disjoints U et V. Alors, pour a et b deux éléments disjoints de Y, l'application f donnée par

$f(x) = a$ si $x \in U$ et $f(x) = b$ si $x \in V$ serait continue et non constante, ce qui contredit l'hypothèse.
b) Soit $f : C \to Y$ une application continue, où Y est un espace discret non réduit à un point. Comme C_i est connexe f est constante sur C_i d'après a), soit $f_{|C_i} = a_i$. Soient $i,\, j \in I$. Il existe alors $k \in I$ tel que $C_i \cup C_j \subset C_k$ et par conséquent $a_i = a_j = a_k$, ce qui prouve que f est constante ; C est donc connexe.

3. Soient $x \in X$ et V un voisinage de x pour lequel $f_{n|V}$ converge uniformément vers $f_{|V}$. Pour $y \in V$, l'inégalité triangulaire nous permet d'avoir, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y))$$

et donc

$$d(f(y), f(x)) \leq 2 \sup_{z \in V}(f(z), f_n(z)) + d(f_n(x), f_n(y)),\ \text{pout tout } n. \tag{1}$$

Soit $\epsilon > 0$. Puisque $f_{n|V}$ converge uniformément vers $f_{|V}$, il existe $N = N(\epsilon, V)$ tel que

$$\sup_{z \in V}(f(z), f_N(z)) \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Ceci et (1) donnent, pour tout $y \in V$,

$$d(f(y), f(x)) \leq \frac{2\epsilon}{3} + d(f_N(x), f_N(y)). \tag{2}$$

Mais f_N est continue en x. Il existe donc W un voisinage de x tel que

$$d(f_N(x), f_N(y)) \leq \frac{\epsilon}{3} \text{ pout tout } y \in W. \tag{3}$$

On pose $U = V \cap W$ (qui est un voisinage de x). Alors une combinaison de (2) et (3) implique

$$d(f(x), f(y)) \leq \epsilon \text{ pout tout } y \in U,$$

ce qui prouve que f est continue en x, et puisque x est arbitraire, on conclut que f est continue partout.