

L2 – Suites et Séries de fonctions

Chapitre 4 :

intégrales dépendant d'un paramètre, corrigé des exercices 3 et 4

3. a) On a  $F(0) = 0$  et

$$F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2} dt = \left[ \frac{1}{2} (\arctan t)^2 \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}.$$

b) Puisque la fonction  $f : (t, x) \in [0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , donnée par

$$f(t, x) = \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}$$

est continue et que l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} f(t, x) dt$  est normalement convergente sur  $[0, +\infty[$  (résulte de la majoration  $f(x, t) \leq \pi/2(1+t^2)$  pour tout  $(t, x) \in [0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ ), on conclut par un théorème du cours que  $F$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}.$$

D'où, pour  $a > 0$  fixé,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \leq \frac{t}{(1+t^2)(1+t^2a^2)}.$$

On en déduit que  $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$  est normalement convergente sur  $[a, +\infty[$ . On conclut alors que  $F'$  existe et elle est continue sur  $[a, +\infty[$ . Par suite,  $F$  est continûment dérivable sur  $\cup_{a>0} [a, +\infty[ = ]0, +\infty[$ , et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} dt.$$

c) Pour  $x \in ]0, +\infty[$  et  $x \neq 1$ , on vérifie facilement que

$$\frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} = \frac{1}{1-x^2} \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} \right).$$

D'où

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x^2} \int_0^T \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} \right) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(1-x^2)} \left[ \ln \left( \frac{1+t^2}{1+t^2x^2} \right) \right]_0^T \\ &= \frac{\ln x}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

Pour  $x = 1$ , on a

$$F'(1) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = \left[ -\frac{1}{2(1+t^2)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

(On vérifiera sans peine que  $\ln x/(x^2 - 1)$  converge vers  $1/2$ , ce qui était prévisible puisque  $F'$  est continue en  $x = 1$ .)

En utilisant la formule  $F(x) = F(1) + \int_1^x F'(t)dt$ , on déduit

$$F(x) = F(1) + \int_1^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt.$$

Par suite  $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$  existe et

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt = F(1) - F(0) = \frac{\pi^2}{8}.$$

4. a) L'intégrale

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

est normalement convergente sur  $[0, +\infty[$  puisque

$$\sup_{x \geq 0} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

et  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$  est convergente. Ceci entraîne la continuité de  $F$ .

b) On a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \right) = -e^{-x(1+t^2)}.$$

Il en résulte que

$$\sup_{x \geq a} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \right) \right| \leq e^{-a(1+t^2)} \text{ pour tout } a > 0.$$

Comme dans l'exercice 3, on déduit de ceci que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ , et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x(1+t^2)} dt.$$

On procède maintenant au calcul de  $F'$ . On a

$$F'(x) = -e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{x}t)^2} dt = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds,$$

où l'on a utilisé le changement de variable  $s = \sqrt{x}t$ . C'est-à-dire

$$F(x) = -c \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \text{ avec } c = \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds.$$

c) En utilisant le fait que  $F$  est une primitive de  $F'$ , on conclut que

$$F(x) = k - c \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt, \tag{1}$$

pour une certaine constante  $k$ .

d) Comme  $F$  est continue en 0, on a

$$F(0) = k = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part,

$$0 \leq F(x) \leq e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-x}, \quad x \geq 0,$$

ce qui implique que  $F(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . En passant à la limite, quand  $x$  tend vers  $+\infty$  dans (1), on obtient

$$0 = k - c \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

Mais  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$  (cette identité se montre facilement en faisant dans la première intégrale le changement de variable  $s = \sqrt{t}$ ). D'où

$$c = \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{k} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$